Série 13 - Dynamique et énergie du solide

1 Cylindre qui roule et décolle

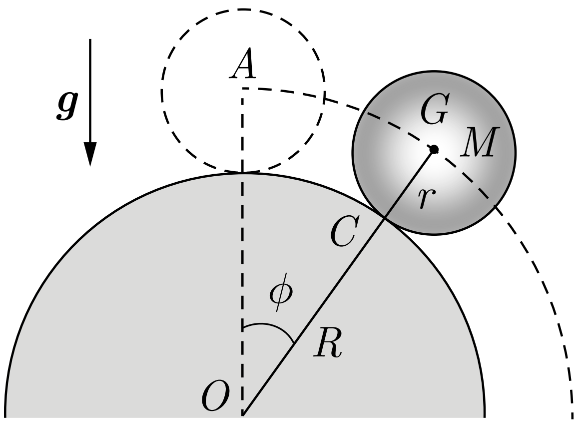
Objectif : Modéliser le mouvement de rotation propre d'un solide indéformable à l'aide de considérations énergétiques.

Théorie : 12.2 Dynamique du solide indéformable ; 13.2 Solide indéformable avec un axe fixe.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un petit cylindre homogène de masse M, de rayon r roule sans glisser sur un grand cylindre fixe de rayon R où $R > r$. Le point de contact entre les deux cylindres est le point C dans le plan vertical en coupe. Initialement, le petit cylindre (en traitillé) est immobile au sommet du grand cylindre et son centre de masse G est confondu avec le point A qui se trouve à une distance $R + r$ au-dessus du centre O du grand cylindre. Puis, le petit cylindre se met à rouler sans glisser vers la droite avant de décoller du grand cylindre. Le frottement statique permet le roulement sans glissement du petit cylindre, mais il n'y a pas de frottement cinétique. Le moment d'inertie du petit cylindre autour de l'axe de symétrie horizontal qui passe par son centre de masse G s'écrit,

$$I_G = \lambda\, M r^2 \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1\,.$$



(a) Avant le décollage, lier la vitesse angulaire de précession $\dot{\phi}$ à la vitesse angulaire de rotation propre $\dot{\psi}$ et déterminer les équations de contraintes dans le plan vertical.

(b) Jusqu'au décollage, déterminer les travaux $W_{0\to1}\left(\boldsymbol{F}_s\right)$ et $W_{0\to1}\left(\boldsymbol{P}\right)$ effectués par la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s$ entre les deux cylindres et le poids

$\boldsymbol{P}$ du petit cylindre de l'angle initial $\phi_0 = 0$ à l'angle de décollage ϕ_1 du petit cylindre.

(c) Déterminer la variation d'énergie cinétique totale $\Delta T_{0\to 1}$ du petit cylindre de l'angle initial $\phi_0 = 0$ à l'angle de décollage ϕ_1 en termes de la vitesse angulaire de precession $\dot{\phi}$.

(d) L'angle de décollage $\phi_1(\lambda)$ du petit cylindre est caractérisé par le paramètre λ. Dans la limite où le petit cylindre a un moment d'inertie nul et se comporte donc comme un point matériel, c'est-à-dire $\lambda = 0$, l'angle de décollage est donné par l'équation,

$$\cos\Big(\phi_1(0)\Big) = \frac{2}{3}\,.$$

Pour $\lambda > 0$, déterminer la relation d'ordre entre $\phi_1(\lambda)$ et $\phi_1(0)$.

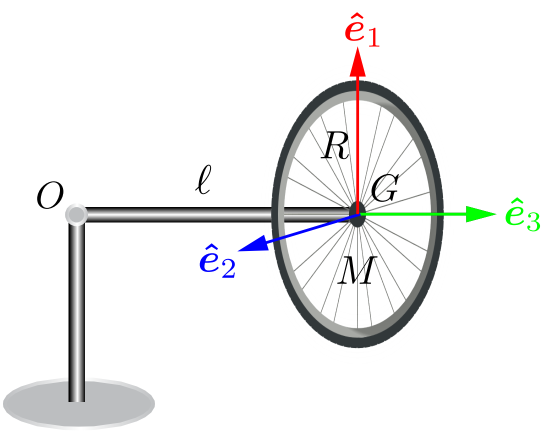
(e) A l'aide de l'énergie mécanique E du petit cylindre et de la formule de Huygens-Steiner évalués au point de contact C entre les cylindres, déterminer l'équation du mouvement du centre de masse G du petit cylindre avant le décollage et l'écrire explicitement seulement en termes de l'angle ϕ et de ses dérivées temporelles.

2 Gyroscope avec une roue de vélo

Objectif : Modéliser le mouvement gyroscopique d'une roue.

Théorie : 13.2 Solide indéformable avec un axe fixe ; 13.3 Gyroscope et effets gyroscopiques

Une roue de vélo de masse M et de rayon R est montée à l'extrémité d'un axe de longueur ℓ et de masse négligeable. L'autre extrémité est fixée sur un socle vertical à l'origine O. On suppose que le frottement cinétique est négligeable. La roue est mise en rotation propre autour de son axe qui est lâché horizontalement.



Dans le repère d'inertie $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$, qui n'a pas de mouvement de rotation propre, les composantes des moments d'inertie de la roue par rapport au centre de masse sont,

$$I_{G_1} = I_{G_2} = \frac{\lambda}{2}\, MR^2 \quad \text{et} \quad I_{G_3} = \lambda\, MR^2 \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1\,.$$

(a) Justifier pourquoi il n'y a pas de nutation de l'axe de la roue en déterminant le moment de force résultant exercé sur la roue évalué à l'origine O.

(b) Déterminer le moment cinétique de la roue $\boldsymbol{L}_O$ évalué à l'origine et calculer sa dérivée temporelle.

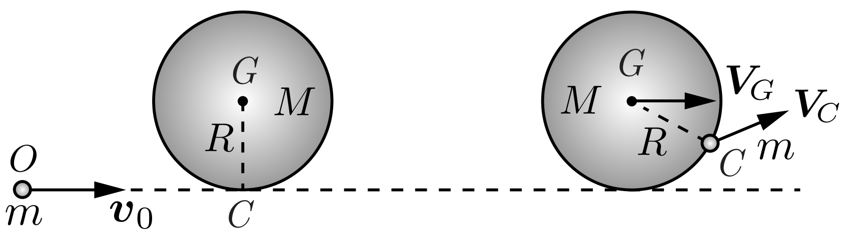
(c) Exprimer la vitesse angulaire de précession $\dot{\phi}$ en termes de la vitesse angulaire de rotation propre $\dot{\psi}$ et déterminer les accélérations angulaires de précession $\ddot{\phi}$ et de rotation propre $\ddot{\psi}$.

3 Collision entre un projectile et un puck

⦿ **Objectif** : Modéliser une collision et un mouvement de rotation propre avec frottement.

📖 **Théorie** : 13.2 Solide indéformable avec un axe fixe ; 13.3 Gyroscope et effets gyroscopiques

Un puck, considéré comme un cylindre homogène et indéformable de masse M et de rayon R, est initialement posé sur une très grande table à coussin d'air parfaitement horizontale. Un projectile, considéré comme un point matériel de masse m de vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0$ glisse sans frottement sur la table et entre en collision avec le cylindre et reste encastré au point C à la surface du cylindre. La trajectoire du point matériel de masse m avant la collision passe par l'origine O.



Vue de dessus
avant impact

Vue de dessus
après impact

Après la collision, le centre de masse du puck G subit une force de frottement visqueux et le puck est soumis à un moment de force de frottement visqueux,

$$\boldsymbol{F}_f = -\,b\,\boldsymbol{V}_G \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{M}_G\left(\boldsymbol{F}_f\right) = -\,\kappa_G\,\boldsymbol{\Omega}\,.$$

La masse du projectile est négligeable par rapport à la masse du puck, c'est-à-dire $m \ll M$. Ainsi, le moment d'inertie I_G du puck évalué en son centre de masse G se réduit à celle du puck homogène,

$$I_G = \frac{1}{2}\,MR^2\,.$$

(a) Déterminer la vitesse du centre de masse $\boldsymbol{V}_G\,(0)$ du puck avec le point matériel encastré après la collision juste après la collision.

(b) Déterminer la vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}\,(0)$ juste après la collision.

(c) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse et en déduire l'évolution temporelle de la vitesse du centre de masse $\boldsymbol{V}_G\,(t)$.

(d) Déterminer l'équation du mouvement de rotation du puck et en déduire l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}\,(t)$.

(e) Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse $\boldsymbol{V}_C\,(t)$ du point C.